

거듭제곱근의 성질과 실수 조건 판별 (수학 I 대표 유형) - 곰셈수학

대표유형 문제

다음 설명 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt{(-3)^2}$ 의 제곱근은 ± 3 이다.
- ② 8의 세제곱근은 $\pm\sqrt[3]{8}$ 이다.
- ③ -81 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{-81}$ 이다.
- ④ n 이 짝수일 때, -16 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.
- ⑤ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 1개뿐이다. (정답)

문제 요약

이 문제는 거듭제곱근의 개수와 실수 조건을 묻는 문제입니다. 특히 짝수 제곱근과 홀수 제곱근의 차이, 그리고 \sqrt{a} 와 a 의 제곱근이 서로 다른 뜻이라는 점을 정확히 알아야 합니다.

핵심 개념 먼저 정리

1. a 의 n 제곱근이란

$$x^n = a$$

를 만족하는 수 x 를 말합니다.

2. n 이 짝수일 때

- $a > 0$ 이면 실수인 n 제곱근은 2개 ($\pm\sqrt[n]{a}$)
- $a = 0$ 이면 실수인 n 제곱근은 1개 (0)
- $a < 0$ 이면 실수인 n 제곱근은 없습니다 (0개).

3. n 이 **홀수**일 때는 양수든 음수든 관계없이 실수인 n 제곱근은 **항상 1개** ($\sqrt[n]{a}$)입니다.

4. \sqrt{a} 는 보통 **음이 아닌 값 하나**를 뜻합니다. 반면, “ a 의 제곱근”은

$$x^2 = a$$

를 만족하는 **모든 수**($\pm\sqrt{a}$)를 뜻합니다.

풀이 전략

1. 각 문장을 식으로 바꿔서 생각합니다.
2. 짝수 제곱근인지 홀수 제곱근인지 먼저 확인합니다.
3. 실수 범위에서 가능한지 판단합니다.
4. 참인 보기만 마지막에 고릅니다.

단계별 상세 풀이 (교사용)

Step 1. ①번 보기 판단

①은

$$\sqrt{(-3)^2} \text{의 제곱근은 } \pm 3 \text{이다.}$$

라고 말하고 있습니다.

먼저 안쪽부터 계산하면

$$(-3)^2 = 9$$

입니다. 따라서

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

입니다.

여기서 아주 많이 헷갈리는 부분이 나옵니다.

$\sqrt{9} = 3$ 이지, $\sqrt{9} = \pm 3$ 이 아닙니다.

이제 문장은 결국 “3의 제곱근은 ± 3 이다”라는 뜻이 됩니다.

그런데 3의 제곱근은

$$x^2 = 3$$

을 만족하는 수이므로

$$x = \pm\sqrt{3}$$

입니다.

즉, ± 3 이 아니라 $\pm\sqrt{3}$ 이므로 ①은 틀린 설명입니다.

따라서 ①은 거짓입니다. (X)

Step 2. ②번 보기 판단

②는

8의 세제곱근은 $\pm\sqrt[3]{8}$ 이다.

라고 되어 있습니다.

세제곱근은

$$x^3 = 8$$

을 만족하는 수를 말합니다. 여기서

$$2^3 = 8$$

이므로 2는 맞습니다.

그런데 -2를 넣어 보면

$$(-2)^3 = -8$$

이므로 8이 아니라 -8이 됩니다. 따라서 -2는 8의 세제곱근이 아닙니다.

홀수 제곱근은 \pm 로 묶어서 쓰면 틀릴 때가 많습니다. 실수 범위에서 8의 세제곱근은 하나뿐이고, 그 값은

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

입니다.

따라서 ②는 거짓입니다. (X)

Step 3. ③번 보기 판단

③은

-81 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{-81}$ 이다.

라고 되어 있습니다.

네제곱근은

$$x^4 = -81$$

을 만족하는 실수 x 를 말합니다. 그런데 어떤 실수 x 에 대해서도

$$x^4 \geq 0$$

입니다. 왜냐하면 짝수 번 곱하면 결과가 음수가 될 수 없기 때문입니다.

따라서

$$x^4 = -81$$

을 만족하는 실수는 존재하지 않습니다. 즉, -81 의 네제곱근 중 실수인 것은 **아예 없습니다.**

“실수인 것은 $\sqrt[4]{-81}$ 이다”라는 말은 틀렸습니다. 실수인 값이 하나도 없기 때문입니다.

따라서 ③은 거짓입니다. (X)

Step 4. ④번 보기 판단

④는

n 이 짝수일 때, -16 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.

라고 되어 있습니다.

n 이 짝수라면

$$x^n$$

은 실수 범위에서 항상 0 이상입니다. 그런데 지금은

$$x^n = -16$$

을 만족해야 합니다. 오른쪽은 음수이므로 실수에서는 불가능합니다.

따라서 실수인 n 제곱근은 2개가 아니라 **0개**입니다.

따라서 ④는 거짓입니다. (X)

Step 5. ⑤번 보기 판단

⑤는

n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 1개뿐이다.

라고 되어 있습니다.

이것은 거듭제곱근의 기본 성질 그대로입니다. n 이 홀수이면

$$x^n = 5$$

는 실수 범위에서 해를 정확히 하나 가집니다.

예를 들어 $n = 3$ 이면

$$x^3 = 5$$

이고, 실수해는

$$x = \sqrt[3]{5}$$

하나뿐입니다.

홀수 거듭제곱 함수는 계속 증가하는 형태이므로 같은 높이의 수평선과 한 번만 만납니다. 그래서 실수해가 정확히 1개입니다.

따라서 ⑤는 참입니다. (O)

Step 6. 정답 정리

각 보기를 정리하면

- ① 거짓 (X)
- ② 거짓 (X)
- ③ 거짓 (X)
- ④ 거짓 (X)
- ⑤ 참 (O)

정답은 ⑤

최종 정답

옳은 것은 ⑤입니다.

자주 하는 실수

- $\sqrt{9}$ 를 ± 3 이라고 쓰는 실수: $\sqrt{9}$ 는 3 하나입니다.
- “제곱근”과 “루트값”을 구분하지 않는 실수: 9의 제곱근은 ± 3 이지만, $\sqrt{9}$ 는 3입니다.
- 홀수 제곱근에도 무조건 \pm 를 붙이는 실수: 세제곱근, 다섯제곱근은 실수 범위에서 하나만 나옵니다.
- 짝수 제곱근에서 음수도 실수가 된다고 착각하는 실수: 예를 들어 -16 의 네제곱근은 실수에서 존재하지 않습니다.

개념 정리

거듭제곱근 문제를 풀 때는 다음 순서로 생각하면 됩니다.

1. 몇 제곱근인지 확인한다.
2. 짝수인지 홀수인지 확인한다.
3. 주어진 수가 양수인지 음수인지 확인한다.
4. 실수해의 개수를 판단한다.

짝수 n : 양수는 실수근 **2개**, 0은 1개, 음수는 **0개**

홀수 n : 어떤 실수라도 실수근은 **항상 1개**

시험에서는 이 성질을 문장으로 비틀어서 자주 묻습니다. 그래서 보기형 문제를 풀 때는 문장을 그대로 읽고 끝내지 말고, 반드시

$$x^n = a$$

꼴로 바꾸어 생각하는 습관이 중요합니다.

대표유형 연습문제 3개 (교사용 정답 표시)

연습문제 1

다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 27의 세제곱근은 ± 3 이다.
- ② **-16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.**
- ③ $\sqrt{16}$ 의 제곱근은 ± 4 이다.

[정답] : ②

-16의 네제곱근은 실수 범위에서 존재하지 않습니다.

연습문제 2

다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 0의 네제곱근 중 실수인 것은 0 하나이다.

② 125의 세제곱근 중 실수인 것은 5 하나이다.

③ 81의 네제곱근 중 실수인 것은 3 하나이다.

[정답] : ③

81의 네제곱근 중 실수인 것은 3과 -3 두 개입니다.

연습문제 3

n 이 자연수일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?

① n 이 짝수이면 -1 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이다.

② n 이 홀수이면 -1 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

③ n 이 홀수이면 4의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이다.

[정답] : ②

홀수 제곱근은 실수 범위에서 항상 1개입니다.

관련 자료 바로가기

[곰쌤수학 홈페이지](#)

[곰쌤수학 대표 카페](#)

[곰쌤수학 티스토리](#)