거듭제곱근의 실수 개수 구하기 (수학 I 대표 유형) - 곰쌤 수학

대표유형 문제

실수 a와 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$으로 나타낼 때,

$$f(12, 8) + f(8, 11) - f(-12, 8) + f(-8, 11)$$

의 값을 구하시오.

[정답] 4

문제 요약

이 문제는 실제로 복잡한 계산을 하는 문제가 아니라, **어떤 수의 n제곱근 중에서 실수인 것이 몇 개인지**를 빠르게 판단하는 문제입니다. 핵심은 딱 두 가지입니다. **a가 양수인지 음수인지**, 그리고 **n이 짝수인지 홀수인지**를 구분하는 것입니다.

먼저 꼭 알아야 하는 핵심 개념

a의 n제곱근이란

$$x^n = a$$

를 만족하는 수 x를 말합니다.

이때 실수 개수는 다음처럼 정리할 수 있습니다.

1. $a > 0$, n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 **2개**

2. $a > 0$, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 **1개**

3. $a < 0$, n이 짝수이면 실수인 n제곱근은 **0개**

4. $a < 0$, n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 **1개**

이 문제는 바로 이 표를 정확히 적용할 수 있는지 묻는 문제입니다.

풀이 전략

1. 각 $f(a, n)$를 하나씩 따로 계산합니다.
2. a가 양수인지 음수인지 확인합니다.
3. n이 짝수인지 홀수인지 확인합니다.
4. 실수인 거듭제곱근의 개수를 써 줍니다.
5. 마지막에 식에 대입하여 계산합니다.

단계별 상세 풀이 (교사용)

Step 1. $f(12, 8)$ 구하기

$f(12, 8)$는 12의 8제곱근 중에서 실수인 것의 개수입니다.

여기서 12는 **양수**이고, 8은 **짝수**입니다. 양수의 짝수 제곱근은 실수에서 항상 2개가 나옵니다.

왜냐하면

$$x^8 = 12$$

을 만족하는 실수는 하나의 양수값과 그 음수값이 함께 나오기 때문입니다. 짝수 번 거듭제곱하면 부호가 사라지므로 $+$와 $-$가 둘 다 가능합니다.

$$f(12, 8) = 2$$

Step 2. $f(8, 11)$ 구하기

$f(8, 11)$은 8의 11제곱근 중에서 실수인 것의 개수입니다.

여기서 8은 **양수**이고, 11은 **홀수**입니다. 양수의 홀수 제곱근은 실수에서 항상 1개입니다.

이유는 홀수 번 거듭제곱은 부호를 그대로 유지하기 때문입니다. 따라서

$$x^{11} = 8$$

을 만족하는 실수는 정확히 하나만 존재합니다.

$$f(8, 11) = 1$$

Step 3. $f(-12, 8)$ 구하기

$f(-12, 8)$은 -12의 8제곱근 중에서 실수인 것의 개수입니다.

여기서 -12는 **음수**이고, 8은 **짝수**입니다. 음수의 짝수 제곱근은 실수 범위에서 존재하지 않습니다.

왜냐하면 어떤 실수 x에 대해서도

$$x^8 \geq 0$$

이기 때문입니다. 그런데

$$x^8 = -12$$

는 왼쪽은 절대로 음수가 될 수 없고, 오른쪽은 음수이므로 실수에서는 불가능합니다.

$$f(-12, 8) = 0$$

Step 4. $f(-8, 11)$ 구하기

$f(-8, 11)$은 -8의 11제곱근 중에서 실수인 것의 개수입니다.

여기서 -8은 **음수**이고, 11은 **홀수**입니다. 음수의 홀수 제곱근은 실수에서 항상 1개가 존재합니다.

홀수 번 거듭제곱은 음수를 그대로 음수로 만들 수 있기 때문입니다. 예를 들어

$$(-2)^3 = -8$$

처럼 홀수 제곱에서는 음수값이 충분히 나올 수 있습니다. 따라서

$$x^{11} = -8$$

도 실수해를 정확히 하나 가집니다.

$$f(-8, 11) = 1$$

Step 5. 전체 식 계산하기

이제 구한 값을 원래 식에 대입합니다.

$$\begin{aligned} & f(12, 8) + f(8, 11) - f(-12, 8) + f(-8, 11) \\ & = 2 + 1 - 0 + 1 \\ & = 4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 4입니다.

최종 정답

$$\boxed{4}$$

자주 하는 실수

- **양수면 무조건 2개라고 생각하는 실수** 양수라도 n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개입니다.
- **음수면 무조건 실수근이 없다고 생각하는 실수** 음수라도 n이 홀수이면 실수인 n제곱근은 1개 존재합니다.
- **짝수/홀수 판단을 하지 않고 바로 값만 외우는 실수** 이 문제는 숫자 크기보다 부호와 지수의 짝홀성이 더 중요합니다.
- $-f(-12, 8)$**를 계산할 때 부호를 잘못 처리하는 실수** $f(-12, 8) = 0$이므로 $-f(-12, 8) = -0 = 0$입니다.

개념 정리

거듭제곱근의 실수 개수 문제는 아래 표처럼 기억하면 가장 편합니다.

$a > 0, n$ 짝수 → **2개**

$a > 0, n$ 홀수 → **1개**

$a < 0, n$ 짝수 → **0개**

$a < 0, n$ 홀수 → **1개**

결국 이 문제는 복잡한 식처럼 보여도, 각 항을 하나씩 표에 맞춰서 판단하면 됩니다.

시험장에서 가장 빠른 방법은 **"양수/음수 먼저, 짝수/홀수 나중"** 순서로 보는 것입니다. 이 순서만 익숙해지면 비슷한 문제를 아주 빠르게 풀 수 있습니다.

대표유형 연습문제 3개 (교사용 정답 표시)

연습문제 1

실수 a와 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$이라 하자. 다음 값을 구하시오.

$$f(7, 6) + f(-7, 5) - f(-7, 6)$$

풀이 및 해설

먼저 $f(7, 6)$을 봅니다.
7은 양수이고 6은 짝수이므로 실수인 6제곱근은 2개입니다. 따라서

$$f(7, 6) = 2$$

입니다.

다음으로 $f(-7, 5)$를 봅니다.
-7은 음수이고 5는 홀수이므로 실수인 5제곱근은 1개입니다. 따라서

$$f(-7, 5) = 1$$

입니다.

마지막으로 $f(-7, 6)$을 봅니다.
-7은 음수이고 6은 짝수이므로 실수인 6제곱근은 없습니다. 따라서

$$f(-7, 6) = 0$$

입니다.

이제 식에 대입하면

$$f(7, 6) + f(-7, 5) - f(-7, 6) = 2 + 1 - 0 = 3$$

입니다.

[정답] : 3

연습문제 2

실수 a와 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$이라 하자. 다음 값을 구하시오.

$$f(15, 4) + f(15, 9) + f(-15, 9)$$

풀이 및 해설

$f(15, 4)$에서 15는 양수, 4는 짝수입니다. 양수의 짝수 제곱근은 실수에서 2개이므로

$$f(15, 4) = 2$$

입니다.

$f(15, 9)$에서 15는 양수, 9는 홀수입니다. 양수의 홀수 제곱근은 실수에서 1개이므로

$$f(15, 9) = 1$$

입니다.

$f(-15, 9)$에서 -15는 음수, 9는 홀수입니다. 음수의 홀수 제곱근은 실수에서 1개이므로

$$f(-15, 9) = 1$$

입니다.

따라서 전체 식은

$$2 + 1 + 1 = 4$$

입니다.

[정답] : 4

연습문제 3

실수 a와 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$이라 하자. 다음 값을 구하시오.

$$2f(-4,7)+f(4,10)-f(-4,10)$$

풀이 및 해설

먼저 $f(-4,7)$을 구합니다.
-4는 음수이고 7은 홀수입니다. 음수의 홀수 제곱근은 실수에서 1개이므로

$$f(-4,7)=1$$

입니다.

다음 $f(4,10)$을 구합니다.
4는 양수이고 10은 짝수입니다. 양수의 짝수 제곱근은 실수에서 2개이므로

$$f(4,10)=2$$

입니다.

다음 $f(-4,10)$을 구합니다.
-4는 음수이고 10은 짝수입니다. 음수의 짝수 제곱근은 실수에서 0개이므로

$$f(-4,10)=0$$

입니다.

이제 식에 대입하면

$$2f(-4,7)+f(4,10)-f(-4,10)=2\cdot 1+2-0$$
$$=2+2=4$$

입니다.

[정답] : 4