

지수법칙과 근호 문제 풀이 - 식을 만족시키는 자연수 n 구하기 - 곱셈수학

근호가 여러 겹으로 들어 있는 식은 처음 보면 아주 복잡해 보이지만, 결국은 모두 **분수지수**로 바꾸는 문제입니다. 이런 유형은 하나씩 따로 계산하는 것보다, 각 부분을 a 의 몇 제곱인지 차분하게 정리하는 것이 핵심입니다. 이번 문제도 왼쪽과 오른쪽을 모두 a 의 지수 꼴로 바꾸면, 마지막에는 지수끼리 비교하여 자연수 n 을 찾을 수 있습니다.

대표유형 문제

다음 식을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{a^n}{a^5}}}$$

문제 요약

이 문제의 핵심은 양변을 모두

$$a^{\text{어떤 수}}$$

꼴로 바꾸는 것입니다. 그렇게 하면 왼쪽 지수와 오른쪽 지수를 비교할 수 있고, $a > 0$, $a \neq 1$ 조건 때문에 밑이 같은 거듭제곱의 지수는 서로 같다고 볼 수 있습니다.

먼저 꼭 알아야 하는 핵심 개념

근호는 분수지수로 바꿀 수 있습니다.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

이 문제는 위 다섯 가지를 순서대로 적용하면 해결됩니다.

풀이 전략

1. 왼쪽 식을 a 의 분수지수 형태로 바꿉니다.
2. 오른쪽 식도 a 의 분수지수 형태로 바꿉니다.
3. 양변의 지수를 같게 두고 n 을 구합니다.
4. 구한 n 이 자연수인지 확인합니다.

단계별 상세 풀이 (학생용)

Step 1. 왼쪽 식을 분수지수로 바꾸기

왼쪽 식은

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}$$

입니다.

먼저 루트 안의 각 항을 분수지수 형태로 바꾸어 곱셈을 정리해 보세요.

루트 안의 식을 정리한 뒤, 바깥의 루트까지 계산하여 전체를 a 의 분수지수로 나타내 보세요.

$$\text{왼쪽 식} = a \text{—————}$$

Step 2. 오른쪽 식을 분수지수로 바꾸기

오른쪽 식은

$$\sqrt[4]{\sqrt{\frac{a^n}{a^5}}}$$

입니다.

먼저 근호 안의 분수를 지수 형태로 바꾸고, 두 개의 거듭제곱근을 차례로 적용하여 a 의 분수지수 형태로 나타내 보세요.

$$\text{오른쪽 식} = a \text{—————}$$

Step 3. 양변의 지수 비교하기

밑이 a 로 같으므로 왼쪽과 오른쪽의 지수를 같다고 두고 방정식의 해를 구해 보세요.

$$n = \underline{\hspace{2cm}}$$

Step 4. 자연수 조건 확인하기

구한 값 n 이 자연수 조건을 만족하는지 확인하고, 최종 정답을 적어보세요.

최종 정답

자주 하는 실수 조심하기!

- $\sqrt[4]{a^3}$ 를 $a^{\frac{1}{4}}$ 로 잘못 쓰는 실수
정확히는 $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ 입니다.
- $\frac{a^n}{a^5}$ 를 $a^{\frac{n}{5}}$ 로 잘못 계산하는 실수
나눗셈에서는 지수를 빼므로 $\frac{a^n}{a^5} = a^{n-5}$ 입니다.
- 제곱근과 네제곱근을 차례로 씌우면서 지수를 더하는 실수
근호는 더하는 것이 아니라 지수를 곱합니다. 따라서 $(a^{n-5})^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = a^{\frac{n-5}{8}}$ 입니다.
- $a \neq 1$ 조건을 무시하는 실수
밑이 1이면 $1^x = 1^y$ 가 항상 성립하므로 지수를 바로 같다고 둘 수 없습니다. 그래서 문제에서 일부러 $a \neq 1$ 조건을 주는 것입니다.

개념 정리

이런 유형은 복잡해 보이지만 결국 다음 흐름으로 풀립니다.

1. 모든 근호를 분수지수로 바꾼다.
2. 곱셈은 지수의 덧셈, 나눗셈은 지수의 뺄셈으로 정리한다.
3. 중첩된 근호는 지수를 곱해서 정리한다.
4. 마지막에 밑이 같으면 지수를 비교한다.

특히 이 문제는 $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$ 가 연달아 있어서 지수가 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 처럼 줄어드는 구조입니다. 이런 구조를 볼 때마다 “루트는 지수로 바꾸자”라는 습관을 가지시면 훨씬 빨리 풀 수 있습니다.

결국 복잡한 근호 문제도 지수법칙 하나로 통일해서 보면 훨씬 간단해집니다.

대표유형 연습문제 (직접 풀어보세요)

연습문제 1

다음 식을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\sqrt{a \cdot \sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^n}{a^2}}$$

연습문제 2

다음 식을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^n}{a^3}}$$

연습문제 3

다음 식을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\sqrt{a \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{\frac{a^n}{a}}$$