동경의 대칭 관계와 일반각 문제 풀이 - $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 θ 구하기 - 곰쌤수학

삼각함수 단원에서 동경의 위치 관계를 묻는 문제는 단순 계산보다 **각의 방향과 일반각의 뜻**을 정확히 이해하고 있는지가 더 중요합니다. 특히 “서로 원점에 대하여 대칭”이라는 말이 나오면, 두 동경이 정확히 반대 방향이라는 뜻이므로 각의 차가 π만큼 난다는 점을 바로 떠올려야 합니다. 이번 문제도 이 핵심 개념만 정확히 잡으면 어렵지 않게 풀 수 있습니다.

대표유형 문제

좌표평면에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하는 각 θ의 동경과 각 7θ의 동경이 서로 원점에 대하여 대칭일 때, 각 θ의 크기는?

$$\left(\text{단}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

① $\frac{\pi}{2}$

② $\frac{\pi}{3}$

③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{5}$

⑤ $\frac{\pi}{6}$

문제 요약

“각 θ의 동경”과 “각 7θ의 동경”이 원점 대칭이라는 것은, 두 동경이 같은 직선 위에 있으면서 방향만 반대라는 뜻입니다. 따라서 두 각의 차는

$$\pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \ldots$$

처럼 홀수배의 π가 됩니다. 이 조건을 식으로 세우고, 마지막에

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

조건을 이용해 알맞은 값을 고르면 됩니다.

먼저 꼭 알아야 하는 핵심 개념

이 문제에서 가장 중요한 개념은 다음 두 가지입니다.

1. 동경이 원점에 대하여 대칭
두 동경이 서로 원점에 대하여 대칭이라는 것은 방향이 정반대라는 뜻입니다. 따라서 두 각의 차는

$$\pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

입니다.

2. 일반각
동경의 방향은 2π만큼 돌려도 같으므로, 각의 관계를 쓸 때는

$$2n\pi$$

를 포함한 일반각 형태로 나타내야 합니다.

즉, 이 문제는 “반대 방향”이라는 말을 “두 각의 차가 홀수배의 π”로 바꾸는 것이 핵심입니다.

풀이 전략

1. 원점 대칭이라는 조건을 식으로 바꿉니다.
2. θ에 대한 방정식으로 정리합니다.
3. 일반해를 구합니다.
4. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 조건에 맞는 값만 골라냅니다.

단계별 상세 풀이 (학생용)

Step 1. 원점 대칭의 뜻을 식으로 바꾸기

동경이 원점 대칭이라는 것은 두 동경이 서로 정반대 방향이라는 뜻입니다. 따라서 두 각의 차는 어떻게 표현할 수 있을까요? 일반각을 사용하여 식을 세워보세요.

$$7\theta - \theta = \underline{\hspace{4cm}}$$

Step 2. θ의 일반해 구하기

위에서 세운 식을 정리하여 θ에 대하여 풀어보세요.

$$\theta = \underline{\hspace{4cm}}$$

Step 3. 조건 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 적용하기

구한 θ의 일반해 식에 정수 $n = 0, 1, 2, \ldots$를 차례로 대입하여, 주어진 범위 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에 들어가는 값을 찾아보세요.

Step 4. 답 확인하기

조건을 만족하는 θ 값을 구한 후, 보기에서 알맞은 번호를 찾아 적어보세요.

최종 정답

자주 하는 실수 조심하기!

- **원점 대칭을 "같은 방향"으로 착각하는 실수**

  같은 방향이면 차가 $2n\pi$이지만, 원점 대칭은 정반대 방향이므로 차가 $(2n+1)\pi$ 입니다.
- **$7\theta - \theta = \pi$만 쓰고 일반각을 빼먹는 실수**

  동경 문제에서는 반드시 $2n\pi$ 를 포함한 일반각으로 써야 합니다.
- **$\theta = \frac{\pi}{2}$를 조건에 넣는 실수**

  문제는 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\frac{\pi}{2}$는 포함되지 않습니다.
- **동경의 위치를 말로만 이해하고 식으로 못 옮기는 실수**

  "정반대 방향"이라는 말을 "각의 차가 홀수배의 π"로 바꾸는 연습이 중요합니다.

개념 정리

동경 문제에서 자주 나오는 관계는 크게 두 가지입니다.

같은 방향

두 동경이 일치하면

$$\alpha - \beta = 2n\pi$$

정반대 방향

두 동경이 원점 대칭이면

$$\alpha - \beta = (2n+1)\pi$$

이 문제는 두 번째 경우였습니다. 즉, 각 θ의 동경과 각 7θ의 동경이 반대 방향이므로

$$7\theta - \theta = (2n+1)\pi$$

를 세우는 것이 핵심이었습니다.

앞으로 비슷한 문제를 보면 먼저 **같은 방향인지, 반대 방향인지**를 확인하고, 그다음에 일반각 식을 세우는 순서로 접근하시면 됩니다.

대표유형 연습문제 (직접 풀어보세요)

연습문제 1

좌표평면에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하는 각 θ의 동경과 각 3θ의 동경이 서로 원점에 대하여 대칭일 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 θ의 값을 구하시오.

연습문제 2

좌표평면에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하는 각 θ의 동경과 각 4θ의 동경이 서로 원점에 대하여 대칭일 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 θ의 값을 구하시오.

연습문제 3

좌표평면에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하는 각 θ의 동경과 각 5θ의 동경이 서로 원점에 대하여 대칭일 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 θ의 값을 구하시오.