근호를 지수로 바꾸어 $m+n$ 구하기 - 유리수 지수 문제 완전 정리 - 곰쌤수학

근호와 지수가 함께 나오는 문제는 겉으로 보면 복잡해 보이지만, 실제로는 모두 같은 원리로 풀립니다. 핵심은 **모든 식을 지수 형태로 통일해서 보는 것**입니다. 특히 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt[3]{7}$처럼 주어진 수를 각각 소인수의 거듭제곱으로 바꾸면, $a^m b^n$의 식을 비교하여 m, n을 한 번에 구할 수 있습니다. 이번 문제는 분수지수와 유리수 지수의 연결을 이해하는 대표 유형입니다.

대표유형 문제

$$a=\sqrt{2}, \qquad b=\sqrt[3]{7}$$

일 때,

$$a^m b^n = \sqrt[6]{28}$$

를 만족시키는 유리수 $m,\ n$에 대하여

$$m+n$$

의 값을 구하시오.

문제 요약

이 문제는 $a, b, \sqrt[6]{28}$을 모두 지수 형태로 바꾸고, 양변에서 2의 지수와 7의 지수를 각각 비교하는 문제입니다. 2와 7은 서로 다른 소수이므로, 각각의 지수를 따로 비교하면 m, n을 정확하게 구할 수 있습니다.

먼저 꼭 알아야 하는 핵심 개념

근호는 모두 분수지수로 바꿀 수 있습니다.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$(x^p)^q = x^{pq}$$

또한 서로 다른 소수의 곱으로 이루어진 식은 각 소수의 지수를 따로 비교할 수 있습니다. 이번 문제에서는 2와 7을 따로 보는 것이 핵심입니다.

풀이 전략

1. $a, b, \sqrt[6]{28}$을 모두 분수지수로 바꿉니다.
2. 양변을 2와 7의 거듭제곱 꼴로 정리합니다.
3. 같은 밑의 지수를 비교하여 $m,\ n$을 구합니다.
4. 마지막에 $m+n$을 계산합니다.

단계별 상세 풀이 (학생용)

Step 1. a와 b를 지수 형태로 바꾸기

문제에서

$$a = \sqrt{2}, \qquad b = \sqrt[3]{7}$$

라고 했습니다.

이를 분수지수로 바꾸어 보세요.

$$a = 2^{\underline{\qquad}}, \qquad b = 7^{\underline{\qquad}}$$

Step 2. 왼쪽 식 $a^m b^n$을 정리하기

이제

$$a^m b^n$$

에 위 결과를 대입하여 지수법칙으로 정리해 보세요.

$$a^m b^n = 2^{\underline{\qquad}} \cdot 7^{\underline{\qquad}}$$

Step 3. 오른쪽 식 $\sqrt[6]{28}$을 지수 형태로 바꾸기

오른쪽 식인

$$\sqrt[6]{28}$$

을 지수 형태로 바꾸어 보세요.

먼저 28을 소인수분해한 뒤, 거듭제곱근의 성질을 이용하여 각 소수의 분수지수 형태로 전개합니다.

$$\sqrt[6]{28} = 2^{\_\_\_\_} \cdot 7^{\_\_\_\_}$$

Step 4. 양변의 지수를 비교하여 $m,\ n$ 구하기

이제 원래 식

$$a^m b^n = \sqrt[6]{28}$$

의 양변 지수를 각각 비교해 보세요.

$$m = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad n = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Step 5. $m + n$ 계산하기

앞에서 구한 m과 n을 더하여 최종 값을 계산해 보세요. (통분 필요)

$$m + n = \_\_\_\_\_\_$$

최종 정답

자주 하는 실수 조심하기!

- **$\sqrt{2}$를 2^2처럼 잘못 보는 실수**: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ 입니다.
- **$\sqrt[6]{28}$에서 28을 바로 $28^{\frac{1}{6}}$까지만 쓰고 멈추는 실수**: 이 문제는 2와 7의 지수를 비교해야 하므로 $28 = 2^2 \times 7$ 로 소인수분해하는 과정이 필수입니다.
- **$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^m$를 $2^{\frac{1}{2}+m}$로 잘못 계산하는 실수**: 거듭제곱의 거듭제곱은 지수끼리 곱해야 하므로 $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^m = 2^{\frac{m}{2}}$ 입니다.
- **$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$를 바로 $\frac{3}{5}$처럼 더하는 실수**: 분모가 다를 때는 반드시 통분해서 계산해야 합니다.

개념 정리

이런 문제는 다음 순서로 풀면 거의 항상 해결됩니다.

1. 근호를 모두 분수지수로 바꾼다.
2. 소인수분해가 가능하면 먼저 한다.
3. 서로 다른 소수의 지수를 각각 비교한다.
4. 마지막에 필요한 식을 계산한다.

특히 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{28}$ 처럼 근호의 차수가 달라도 전부 지수 형태로 바꾸면 같은 원리로 비교할 수 있습니다.

즉, 이 단원은 근호 문제처럼 보여도 실제로는 지수법칙 문제라고 생각하시면 훨씬 쉽게 접근할 수 있습니다.

대표유형 연습문제 (직접 풀어보세요)

연습문제 1

$$a = \sqrt{3}, \qquad b = \sqrt[3]{5}$$

일 때,

$$a^m b^n = \sqrt[6]{45}$$

를 만족시키는 유리수 $m,\ n$에 대하여 $m + n$의 값을 구하시오.

연습문제 2

$$a = \sqrt{5}, \qquad b = \sqrt[3]{2}$$

일 때,

$$a^m b^n = \sqrt[6]{200}$$

를 만족시키는 유리수 $m,\ n$에 대하여 $m + n$의 값을 구하시오.

연습문제 3

$$a = \sqrt{11}, \qquad b = \sqrt[3]{3}$$

일 때,

$$a^m b^n = \sqrt[6]{99}$$

를 만족시키는 유리수 $m,\ n$에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.