

근호와 분수지수 계산 문제 풀이 - 곱셈과 나눗셈이 섞인 식 간단히 하기 - 곱셈수학

근호가 여러 개 섞여 있고, 곱셈과 나눗셈까지 함께 나오면 식이 아주 복잡해 보입니다. 하지만 이런 문제는 결국 모든 근호를 분수지수로 바꾸고, 지수끼리 더하고 빼는 문제입니다. 이번 문제도 겉모양에 겁먹지 않고, $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[6]{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$ 를 차례대로 지수로 바꾸면 아주 깔끔하게 정리할 수 있습니다.

대표유형 문제

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\sqrt{a^4b} \times \sqrt[6]{a^4b} \div \sqrt[3]{a^5b^2}$$

을 간단히 하면?

- ① ab
- ② $b\sqrt{a}$
- ③ b
- ④ a (정답)
- ⑤ a^2b

문제 요약

이 문제는 복잡한 근호식을 계산하는 것처럼 보이지만, 실제 핵심은 근호를 분수지수로 바꾸는 것과 같은 밀의 지수끼리 더하고 빼는 것입니다. 또한 $a > 0, b > 0$ 조건이 있으므로, 근호를 지수 형태로 바꿀 때 부호 문제를 걱정하지 않고 바로 계산할 수 있습니다.

먼저 알아둘 핵심 개념

$$\sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[6]{X} = X^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{X} = X^{\frac{1}{3}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

이 문제는 결국 위 공식만 정확히 적용하면 풀립니다. 특히 한꺼번에 계산하려고 하지 말고, 각 근호를 먼저 지수로 바꾼 뒤, a 끼리, b 끼리 따로 정리하는 것이 가장 안전합니다.

풀이 전략

1. 세 근호를 모두 분수지수 형태로 바꿉니다.
2. 곱셈과 나눗셈을 지수의 덧셈과 뺄셈으로 바꿉니다.
3. a 의 지수와 b 의 지수를 각각 따로 계산합니다.
4. 최종적으로 보기와 비교합니다.

단계별 상세 풀이 (교사용)

Step 1. 각 근호를 분수지수로 바꾸기

주어진 식은

$$\sqrt{a^4b} \times \sqrt[6]{a^4b} \div \sqrt[3]{a^5b^2}$$

입니다. 이를 하나씩 지수로 바꾸면

$$\sqrt{a^4b} = (a^4b)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[6]{a^4b} = (a^4b)^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{a^5b^2} = (a^5b^2)^{\frac{1}{3}}$$

따라서 전체 식은

$$(a^4b)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^4b)^{\frac{1}{6}} \div (a^5b^2)^{\frac{1}{3}}$$

로 바꿉니다.

Step 2. 각 항의 지수를 전개하기

이제 거듭제곱의 법칙 $(xy)^n = x^ny^n$ 과 $(a^m)^n = a^{mn}$ 을 이용해 각 항을 전개하겠습니다.

첫 번째 항은

$$(a^4b)^{\frac{1}{2}} = a^{4 \cdot \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^2 b^{\frac{1}{2}}$$

두 번째 항은

$$(a^4b)^{\frac{1}{6}} = a^{4 \cdot \frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}}$$

세 번째 항은

$$(a^5b^2)^{\frac{1}{3}} = a^{5 \cdot \frac{1}{3}} b^{2 \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}}$$

따라서 전체 식은

$$a^2 b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}}$$

가 됩니다.

Step 3. a 와 b 를 각각 따로 정리하기

이제 a 끼리, b 끼리 따로 지수를 계산하겠습니다.

먼저 a 의 지수는

$$2 + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}$$

입니다. 2를 분모 3으로 바꾸면 $2 = \frac{6}{3}$ 이므로

$$\frac{6}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

따라서 a 부분은 $a^1 = a$ 입니다.

이제 b 의 지수는

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$$

입니다. 공통분모를 6으로 맞추면 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 이므로

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = 0$$

따라서 b 부분은 $b^0 = 1$ 이 됩니다.

그러므로 전체 식은

$$a \cdot 1 = a$$

로 정리됩니다.

Step 4. 보기와 비교하여 정답 찾기

우리가 구한 결과는

$$a$$

입니다.

보기에서 a 는 ④번이므로 정답은 ④입니다.

최종 정답

④

즉, 식을 간단히 하면 a 입니다.

자주 하는 실수

- $\sqrt[6]{a^4b}$ 를 $a^{\frac{4}{6}}b$ 처럼 잘못 쓰는 실수 b 에도 똑같이 $\frac{1}{6}$ 승이 붙어야 하므로

$$(a^4b)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6}}b^{\frac{1}{6}}$$

입니다.

- 나눗셈을 하면서 지수를 더하는 실수 나눗셈은 지수를 빼야 합니다.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

입니다.

- $b^0 = 0$ 이라고 착각하는 실수 $b > 0$ 이므로

$$b^0 = 1$$

입니다.

- a 와 b 를 따로 정리하지 않고 한 번에 계산하다가 꼬이는 실수 이런 문제는 반드시 밑이 같은 문자끼리 따로 정리해야 계산이 깔끔합니다.

개념 정리

근호가 섞여 있는 문자식 문제는 다음 순서로 풀면 거의 틀리지 않습니다.

1. 모든 근호를 분수지수로 바꾼다.
2. 곱셈은 지수를 더하고, 나눗셈은 지수를 뺀다.
3. a, b 처럼 밑이 같은 문자끼리 따로 정리한다.
4. 마지막에 보기와 비교한다.

특히 이 문제처럼 $a > 0, b > 0$ 조건이 있으면, 근호를 분수지수로 바꾸는 과정이 더 자연스럽게 안전합니다. 양수 조건이 있기 때문에 제곱근, 세제곱근, 육제곱근을 다룰 때 불필요한 부호 고민을 줄일 수 있습니다.

결국 이런 유형은 식이 길어 보여도 **근호 → 지수로만 바꾸면 단순한 지수 계산 문제로 바뀐다**는 점을 기억하면 됩니다.

대표유형 연습문제 3개 (교사용 정답 표시)

연습문제 1

$x > 0, y > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt{x^2y} \times \sqrt[3]{xy^2} \div \sqrt[6]{x^4y^5}$$

풀이 및 해설

먼저 각 항을 분수지수로 바꿉니다.

$$\sqrt{x^2y} = (x^2y)^{\frac{1}{2}} = x^1y^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{xy^2} = (xy^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[6]{x^4y^5} = (x^4y^5)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6}}y^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}}$$

입니다.

따라서 전체 식은

$$x^1y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \div x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}}$$

입니다.

이제 x 의 지수를 계산하면

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

이고,

y 의 지수를 계산하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

입니다.

따라서 식은

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

로 정리됩니다.

[정답] : $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

연습문제 2

$p > 0$, $q > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt[4]{p^2q^3} \times \sqrt[2]{p^2q} \div \sqrt[4]{pq}$$

풀이 및 해설

각 항을 분수지수로 바꾸면

$$\sqrt[4]{p^2q^3} = p^{\frac{2}{4}}q^{\frac{3}{4}} = p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{p^2q} = p^{\frac{2}{2}}q^{\frac{1}{2}} = pq^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{pq} = p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}$$

입니다.

따라서 전체 식은

$$p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{4}} \cdot pq^{\frac{1}{2}} \div p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}$$

입니다.

이제 p 의 지수를 계산하면

$$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

이고,

q 의 지수는

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

입니다.

따라서 식은

$$p^{\frac{5}{4}}q$$

입니다.

[정답] : $p^{\frac{5}{4}}q$

연습문제 3

$m > 0, n > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt[3]{m^2n} \times \sqrt[6]{m^4n^5} \div \sqrt{mn^2}$$

풀이 및 해설

각 항을 분수지수로 바꾸면

$$\sqrt[3]{m^2n} = m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{m^4n^5} = m^{\frac{4}{6}}n^{\frac{5}{6}} = m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{5}{6}}$$

$$\sqrt{mn^2} = m^{\frac{1}{2}}n^1$$

입니다.

따라서 전체 식은

$$m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{5}{6}} \div m^{\frac{1}{2}}n$$

입니다.

m 의 지수는

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

이고,

n 의 지수는

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1 = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$$

입니다.

따라서 최종 결과는

$$m^{\frac{5}{6}}n^{\frac{1}{6}}$$

입니다.

[정답] : $m^{\frac{5}{6}}n^{\frac{1}{6}}$

관련 자료 바로가기

[곰쌤수학 대표 카페](#)

[곰쌤수학 티스토리](#)

곰쌤수학 대표 카페에서도 각종 자료를 공유합니다.

곰쌤수학 티스토리 블로그도 함께 방문해 주세요.